Curso de Electromagnetismo

Rubens Amaral

Instituto de Física - Universidade Federal Fluminense

Av. Litorânea, S/N, Boa Viagem, Niterói, CEP.24210-340, Rio de Janeiro - Brasil

4 de agosto de 2014

1.1 Revisão de Análise Vetorial

1.1.1 Operações Básicas com Vetores

No nosso curso lidamos seguidamente com grandezas de natureza vetorial. A utilização correta da notação vetorial é um primeiro e importante passo para a compreensão das leis físicas que regem o electromagnetismo. Na nossa notação básica, $\vec{V}$ representa um vetor cujos componentes são: V_1, V_2 e V_3, ou respectivamente V_x, V_y e V_z. Nos referimos a uma componente genérica com índices de letras latinas, V_i ou V_j por exemplo. Neste caso i ou j pode assumir qualquer dos valores 1, 2 ou 3 referindo-se a x, y ou z. Obs.: O módulo do vetor, V, é dado por $V = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} V_i^2}$. **Atenção : Não utilizamos as letras i, j e k para designar os componentes x, y e z respectivamente.**

Para referência relembramos as operações básicas com vetores:

1) Adição. Usaremos sempre a notação $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$. Observe as propriedades: Comutatividade ($\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$); existência do elemento neutro ($\vec{A}+\vec{0}=\vec{A}$); associatividade ($\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$); multiplicação por escalar (a$(\vec{A}+\vec{B})=$a$\vec{A}+$a$\vec{B}$).

2) Produto escalar: $\vec{A}.\vec{B}= AB\cos\theta$.

3) Produto vetorial: $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=$vetor ortogonal a $\vec{A}$ e $\vec{B}$ com sentido pela regra da mão direita e de módulo dado por $AB\sin\theta$.

Neste curso usaremos muito a notação em termos de componentes:

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i\hat{e}_i = A_x\hat{e}_x + A_y\hat{e}_y + A_z\hat{e}_z = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3. \quad (1.1.1)$$

Observe a distinção $A_i=$ componente na direção $\hat{e}_i$ (número) e $A_i\hat{e}_i=$projeção de $\vec{A}$ na mesma direção (vetor).

Regras básicas de manipulação:

1) Adição: adicionar cada componente.
2) Produto por escalar: multiplicar cada componente pelo escalar.
3) Produto escalar: Somar produtos dos componentes em cada direção.

Vamos "demonstrar"esta última regra usando o símbolo "delta de Kronecker"$\delta_{i,j}$ que vale 1 quando $i=j$ e 0 quando $i\neq j$. Assim vale sempre a regra $\sum_{i=1}^{3}(\text{qualquer coisa})_i\delta_{i,j} = (\text{qualquer coisa})_j$ assim como $\sum_{j=1}^{3}(\text{qualquer coisa})_j\delta_{i,j} = (\text{qualquer coisa})_i$, daí:

$$\begin{aligned}
\vec{A}.\vec{B} &= (\sum_{i=1}^{3} A_i\hat{e}_i).(\sum_{i=1}^{3} B_i\hat{e}_i) = (\sum_{i=1}^{3} A_i\hat{e}_i).(\sum_{j=1}^{3} B_j\hat{e}_j) \\
& \sum_{i=1}^{3}(A_i\hat{e}_i.(\sum_{j=1}^{3} B_j\hat{e}_j)) = \sum_{i=1}^{3} A_i(\sum_{j=1}^{3} A_j\hat{e}_j.\hat{e}_i) \\
& \sum_{i=1}^{3} A_i \sum_{j=1}^{3} A_j\hat{e}_j.\hat{e}_i = \sum_{i=1}^{3} A_i \sum_{j=1}^{3} A_j\delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{3} A_iA_i.
\end{aligned}$$

Observe que a troca de índice de soma de i para j na primeira linha foi essencial para manipular os somatórios (**Nunca repita os nomes (letras) de dois índices de soma distintos**).

O cálculo acima nos sugere adotar umas regras para simplificar a manipulação com somas de objetos com índices. A primeira observação que fazemos é que é comum somar sobre o produtos de dois objetos com mesmo índice ($\sum_{i=1}^{3} A_i\hat{e}_i$). Vamos adotar uma convenção chamada de convenção de somatório ou convenção de Einstein de sempre que houver dois índices repetidos num produto deixar o somatório subentendido. Assim temos que $A_i\hat{e}_i \equiv \sum_{i=1}^{3} A_i\hat{e}_i$ ou que $A_jA_j = \sum_{j=1}^{3} A_jA_j$. Observe que com o somatório subentendido a letra que designa o índice é irrelevante ($A_iA_i = A_jA_j = \sum_{j=1}^{3} A_jA_j$). A ordem com que aparecem os fatores é também irrelevante desde que não mudem os índices de cada fator ($A_iB_iC_jD_j = A_iC_jB_iD_j = \sum_i A_iB_i \sum_j C_jD_j = A_jB_jC_iD_i$). A última igualdade acima se deve ao caráter "mudo"dos índices de somatório, seu significado está na relação que ele estabelece entre os fatores nas parcelas e não nas letras que designam os índices. Obs.: Caso seja necessário exibir o produto de dois objetos com índices genéricos sem soma sobre os índices acrescentaremos o símbolo "SS", Sem Soma, à expressão.

O produto vetorial expresso em componente é dado por

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \tag{1.1.2}$$

Assim por exemplo

$$(\vec{A}\times\vec{B})_1 = A_2B_3 - A_3B_2. \tag{1.1.3}$$

A manipulação de expressões vetoriais utilizando a notação em termos de componentes pode ser um instrumento bastante útil. Após um pouco de prática, acredito que o leitor se convencerá disto. A notação em termos de componentes permite expressar relações entre vetores diretamente como relações entre os componentes destes vetores, e isto pode ser muito útil do ponto de vista didático. Uma palavra de alerta me parece necessária. A mistura da notação vetorial com a notação em termos de componentes somente deve ser realizada se houver segurança do aluno. Por exemplo se uma igualdade entre um vetor $\vec{A}$ e $\vec{B}$ está estabelecida, ela pode ser expressa como

$$\vec{A} = \vec{B} \tag{1.1.4}$$

ou como

$$A_i = B_i. \tag{1.1.5}$$

No entanto **nunca se deve misturar a notação** escrevendo algo como

$$\vec{A} = B_i. \tag{1.1.6}$$

Enganos desta natureza ocorrem com frequência incrivelmente alta, no calor da luta pelo aprendizado. Outro exemplo. Suponha que o vetor $\vec{A}$ seja igual ao produto do vetor $\vec{B}$ pelo produto escalar entre os vetores $\vec{C}$ e $\vec{D}$, ok? Você pode expressar isto como: $\vec{A} = \vec{B}(\vec{C}.\vec{D})$, ou $\vec{A} = \vec{B}C_iD_i$, ou $A_i = B_i(\vec{C}.\vec{D})$ ou ainda $A_i = B_iC_jD_j$. Porém **não faz sentido escrever** $\vec{A} = B_iC_jD_j$, ou $A_i = B_iC_iD_i$ ou $A_i = B_i(\vec{C}.D_j)$ ou .... Arriscando a pecar pela excesso de reiteração da repetição: uma regra simples deve ser seguida, qual seja, se o lado direito de uma igualdade é um vetor, o lado esquerdo também deve ser. Se o lado direito é uma componente de um vetor, assim deve ser o lado esquerdo.

1.1.2 Manipulando produto vetorial com o símbolo de Levi-Civita

O produto vetorial poder ser expresso de maneira simples em termos de componentes com a ajuda do símbolo de Levi-Civita, ϵ_{ijk}. Este símbolo tem três índices e todos eles podem assumir os valores de 1 a 3 referentes a componentes x a z. Há portanto 27 "componentes"para este símbolo. Os seus valores são, no entanto somente três, 1 ou -1 ou 0. Eles são determinados pela regra:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \text{ se i,j,k=1,2,3 ou 2,3,1 ou 3,1,2.} \\ -1 \text{ se i,j,k=2,1,3, ou 1,3,2 ou 3,2,1.} \\ 0 \text{ se qualquer índice repetir.} \end{cases} \tag{1.1.7}$$

Vemos que $\epsilon_{123} = 1$ e que qualquer número ímpar de troca de dois índices muda o sinal, enquanto trocas pares não mudam. Ele é um símbolo totalmente antissimétrico, qualquer troca de dois índices troca o sinal, $\epsilon_{123} = 1$ enquanto $\epsilon_{213} = -1$. é fácil concluir , usando a convenção de somatório, que

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k = \epsilon_{ikj} A_k B_j \tag{1.1.8}$$

ou igualmente $(\vec{A} \times \vec{B})_j = \epsilon_{jik} A_i B_k$.

Uma propriedade básica do símbolo de Levi-Civita que faz com que ele seja útil num curso de electromagnetismo é a seguinte (Convenção de somatório implícita!):

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \tag{1.1.9}$$

Demonstração:

Temos que $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn}$=$\epsilon_{1jk}\epsilon_{1mn}$+ $\epsilon_{2jk}\epsilon_{2mn}$+$\epsilon_{3jk}\epsilon_{3mn}$. Note que devido ao caráter totalmente antissimétrico do símbolo de Levi-Civita, o produto será diferente de zero somente se os índices j e k forem distintos, assim como os índices m e n. Além disto é preciso que $\{m, n\}$ seja o mesmo conjunto que $\{j, k\}$. A razão é que se houver três valores distintos entre os índices j, k, m e n, necessariamente pelo menos um deles coincidirá com i, e o respectivo símbolo será nulo. Assim teremos necessariamente $j = m$ e $k = n$ ou $j = n$ e $k = m$, para que haja contribuição não nula. Para que ϵ_{ijk} seja não nulo, é preciso que $j \neq k$ e, ao somarmos em i, apenas para um valor de i ϵ_{ijk} será não nulo. Neste caso o seu sinal será o mesmo que o de ϵ_{imn}, se $j = m$ e $k = n$, ou de sinal oposto se $j = n$ e $k = m$. Isto demonstra o resultado, já que qualquer outra combinação de índices dará produto nulo.

A principal utilidade do símbolo de Levi-Civita está em que ele permite a demonstração rápida de diversas identidades vetoriais. Para ganhar destreza na manipulação com soma de termos com índices vale acrescentar mais um resultado:

A contração dupla de um símbolo com dois índices antissimétrico com outro se reduz à contração com a parte antissimétrica daquele. Explico: Qualquer objeto com dois índices C_{ij} pode ser escrito como $C_{\{ij\}} + C_{[ij]}$ onde $C_{\{ij\}} = (C_{ij} + C_{ji})/2$ e $C_{[ij]} = (C_{ij} - C_{ji})/2$. Assim $C_{\{ij\}} = C_{\{ji\}}$ (parte simétrica) enquanto que $C_{[ij]} = -C_{[ji]}$ (parte antissimétrica). Para demonstrar o resultado acima note que

$$\epsilon_{ijk} C_{jk} = \epsilon_{ijk}(C_{\{jk\}} + C_{[jk]}) \tag{1.1.10}$$

O primeiro termo é nulo (multiplicamos por dois por conveniência):

$$\begin{aligned}
2\epsilon_{ijk}C_{\{jk\}} &= \epsilon_{ijk}C_{\{jk\}} + \epsilon_{ijk}C_{\{jk\}} \\
&= \epsilon_{ijk}C_{\{jk\}} + \epsilon_{ikj}C_{\{kj\}} \text{ (índices mudos!)} \\
&= \epsilon_{ijk}C_{\{jk\}} - \epsilon_{ijk}C_{\{kj\}} \text{ (antissimetria do } \epsilon) \\
&= \epsilon_{ijk}C_{\{jk\}} - \epsilon_{ijk}C_{\{jk\}} \text{ (simetria do } C_{\{jk\}} \text{)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Corolário: Usando que $(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk}A_jB_k$ pode-se notar então que $(\vec{A} \times \vec{B}) = -(\vec{B} \times \vec{A})$ e portanto $(\vec{A} \times \vec{A}) = 0$.

Como aplicação vejamos como obter algumas propriedades do produto triplo (escalar) de vetores:

$$\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}.(\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C}.(\vec{A} \times \vec{B}) \tag{1.1.11}$$

Demonstração :

$$\begin{aligned}
\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) &= \epsilon_{ijk}A_iB_jC_k \\
\vec{B}.(\vec{C} \times \vec{A}) &= \epsilon_{ijk}B_iC_jA_k \\
\vec{C}.(\vec{A} \times \vec{B}) &= \epsilon_{ijk}C_iA_jB_k
\end{aligned}$$

Basta permutar ciclicamente os nomes dos índices ijk, para ter sempre no lado direito $A_iB_jC_k$, e depois utilizar que o símbolo de Levi-Civita não muda por permutação cíclica para igualar os lados direitos.

Exercício: Demonstre que $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = -\vec{B}.(\vec{A} \times \vec{C})$.

Exercício: Demonstre que $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$. Obs: Utilize a regra para produto de duas ϵ,s.

1.1.3 Comportamento sob rotação

Quando rodamos os eixos de coordenadas $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ em torno do eixo $\hat{z}$ de um ângulo θ os componentes de um vetor $\vec{A}$ nos novos eixos são mudados para:

$$\begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta & 0 \\ -sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \tag{1.1.12}$$

Do mesmo modo sob uma rotação genérica os componentes de um vetor são mudadas por uma matriz ortogonal de determinante unitário ($R^{-1} = R^T$ ou $R_{ij} = R^{-1}_{ji}$) arbitrária:

$$\begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \tag{1.1.13}$$

Ou em notação de componentes:

$$A'_i = R_{ij}A_j \tag{1.1.14}$$

Vale a pena notar que este comportamento sob rotação pode ser utilizado como a própria definição do que entendemos como um vetor, um objeto com três componentes indexadas por um índice (V_i) que sob uma rotação descrita pela matriz de rotação R se comporta como $V_i' = R_{ij}V_j$. Generalizando, esta propriedade aplicada a objetos com mais de um índice pode ser utilizada para definir tensores. Estes são objetos cujos componentes com índices mudam sob rotação de maneira análogas às de um vetor. Por exemplo um tensor de dois índices B_{ij} tem seus componentes mudados como

$$B'_{ij} = R_{in}R_{jm}B_{nm}. \tag{1.1.15}$$

Como exemplo de tensor temos objetos definidos a partir de dois vetores $C_{ij} = A_iB_j$ onde $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são vetores.

1.1.4 Cálculo diferencial-Resumo

I-Gradiente

Campo escalar: uma função definida em uma região do espaço tal que quando realizamos uma rotação o valor da função em cada ponto não muda:

$$\phi'(\vec{r}') = \phi(\vec{r}) \tag{1.1.16}$$

Campo vetorial: um campo de vetores definidos um uma região do espaço tal que quando realizamos uma rotação os componentes do vetor em cada ponto do espaço mudam como um vetor:

$$\vec{V}_i'(\vec{r}') = R_{ij}\vec{V}_j(\vec{r}) \tag{1.1.17}$$

A partir de uma função escalar podemos construir uma função vetorial pela operação de gradiente:

$$\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \partial_i\phi(\vec{r})\hat{e}_i \tag{1.1.18}$$

ou em componentes

$$\nabla_i\phi(\vec{r}) = \partial_i\phi(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial r_i}\phi(\vec{r}). \tag{1.1.19}$$

O significado geométrico do gradiente está contido no resultado de que uma variação em primeira ordem de uma função é dada por

$$\Delta\phi = \vec{\nabla}\phi.\Delta\vec{r}. \tag{1.1.20}$$

Assim $\vec{\nabla}\phi$ é um vetor que aponta na direção de máxima variação do campo e cujo módulo é a derivada direcional naquela direção.

A operação de construção de uma função vetorial, o gradiente, a partir de uma função escalar sugere que seja útil a introdução de um símbolo associado a esta operação, o operador $\vec{\nabla}$. Dizemos que o operador $\vec{\nabla}$ atuando no campo escalar ϕ leva à formação do campo vetorial gradiente $\vec{\nabla}\phi$. O operador gradiente pode ser manipulado de maneira muito semelhante à manipulação de vetores desde que com alguns cuidados:

$$\vec{\nabla} = \partial_i \hat{e}_i. \tag{1.1.21}$$

Os cuidados a que me refiro residem em que o operador por si só não é um vetor, mas se comporta como tal quando aplicado a funções de caráter vetorial definido.

Exercício: Demonstre, usando a regra da cadeia para derivadas, que o gradiente de um campo escalar se comporta realmente como um campo vetorial. Isto é, sob uma rotação , $x_i \longrightarrow x'_i$, temos que

$$(\vec{\nabla}'\phi)_i = R_{ij}(\vec{\nabla}\phi)_j. \tag{1.1.22}$$

II Divergência

Aplicando o operador gradiente a um campo vetorial, através da realização do "produto escalar", produz um campo escalar chamado divergência do campo vetorial:

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \partial_i V_i. \tag{1.1.23}$$

Exercício: Demonstre que a divergência de um campo vetorial é um campo escalar. Isto é, considere uma rotação, e como se transformam sob ela os componentes do vetor e as derivadas.

Interpretação : $\vec{\nabla}.\vec{V}$ mede se há fontes ou sumidouros para o campo $\vec{V}$ conforme a divergência seja maior ou menor que zero.

III Rotacional

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} \tag{1.1.24}$$

ou

$$(\vec{\nabla} \times \vec{V})_i = \epsilon_{ijk}\partial_j V_k. \tag{1.1.25}$$

Interpretação :O rotacional mede se há vórtices ou circulação do campo $\vec{V}$.

Exercício(resolvido): demonstre que o rotacional se comporta como um vetor:

Demonstração :

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{V})'_i &= \epsilon_{ijk}\partial'_j V'_k \\ &= \epsilon_{ijk}(\frac{\partial r^l}{\partial r'_j}\partial_l)(R_{km}V_m) \end{aligned}$$

Usando que $r'_i = R_{ij}r_j$ e a relação inversa $r_i = R^{-1}_{ij}r'_j$ que envolve a matriz inversa de R, R^{-1} ($R^{-1}_{ij}R_{jk} = R_{ij}R^{-1}_{jk} = \delta_{ij}$) temos então que

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}(\frac{\partial r^l}{\partial r'_j}\partial_l)(R_{km}V_m) &= \epsilon_{ijk}(R^{-1}_{lj}\partial_l)(R_{km}V_m) \\ &= \epsilon_{ijk}R_{jl}R_{km}\partial_l V_m \\ &= \epsilon_{njk}\delta_{in}R_{jl}R_{km}\partial_l V_m \\ &= \epsilon_{njk}R_{np}R^{-1}_{pi}R_{jl}R_{km}\partial_l V_m. \end{aligned}$$

Usamos agora a identidade

$$\epsilon_{njk} R_{np} R_{jl} R_{km} = \epsilon_{plm} Det(R), \tag{1.1.26}$$

obtendo, já que as matrizes de rotação têm determinantes unitários:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}(\frac{\partial r^l}{\partial r'_j}\partial_l)(R_{km}V_m) &= \epsilon_{plm} Det(R) R^{-1}_{pi} \partial_l V_m \\ &= R_{ip}(\epsilon_{plm}\partial_l V_m) \end{aligned}$$

Isto termina a demonstração , já que esta é a maneira como se transforma o componente i de um vetor.

IV Identidades vetoriais:

Todas as regras de manipulação algébrica de vetores podem ser repetidas substituindo-se um vetor pelo operador $\vec{\nabla}$ tomando cuidado com a ordem dos fatores já que o operador $\vec{\nabla}$ atua como uma derivada e está sujeito à regra da cadeia.

Exemplos:

1)Se ϕ e ψ são escalares, então $\vec{\nabla}(\phi\psi) = \phi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\phi$. Se ψ for um número constante, o primeiro termo estará ausente.

2)$\vec{\nabla}(\psi + \phi) = \vec{\nabla}\psi + \vec{\nabla}\phi$.

3)$\vec{\nabla}.(\phi\vec{V}) = (\vec{\nabla}\phi).\vec{V} + \phi\vec{\nabla}.\vec{V}$

Demonstração : $\partial_i(\phi V_i) = (\partial_i\phi)V_i + \phi\partial_i V_i$.

4)$\vec{\nabla}.(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}.(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}.(\vec{\nabla}\times\vec{B})$.

Exercício: Demonstre esta relação.

5)$\vec{\nabla}\times(\phi\vec{V}) = \phi\vec{\nabla}\times\vec{V} + \vec{\nabla}\phi\times\vec{V}$

Exercício: Demonstre esta relação.

6)$\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{C}) + \vec{C}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{C}) - (\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{C} - (\vec{C}.\vec{\nabla})\vec{A}$.

7)$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A})$.

V Operadores de segunda ordem.

1) $\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\phi = \partial_i\partial_i\phi = \nabla^2\phi$ Operador Laplaciano.

2)$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi = 0$

3)$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = 0$

4)$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{V}) - \nabla^2\vec{V}$.

1.1.5 Teoremas fundamentais para operadores diferenciais.

1)Gradiente:

$$\int_a^b \vec{\nabla}\phi\ .d\vec{l} = \phi(\vec{r}_b) - \phi(\vec{r}_a). \tag{1.1.27}$$

Este teorema permite a interpretação geométrica do gradiente.

2) Teorema da divergência:

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}.\vec{V}\ d^3r = \oint_{\delta\mathcal{V}} \vec{V}.d\vec{S}, \tag{1.1.28}$$

onde $\delta\mathcal{V}$ é a borda da região $\mathcal{V}$. Este teorema permite a interpretação geométrica da divergência.

3) Teorema de Stokes:

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{\nabla} \times \vec{V} \, .d\vec{S} = \oint_{\delta\mathcal{S}} \vec{V}.d\vec{l}, \qquad (1.1.29)$$

onde $\delta\mathcal{S}$ é a borda da superfícies $\mathcal{S}$. Este teorema permite a interpretação geométrica do rotacional.

4)Propriedades de campos irrotacionais. As seguintes afirmações são equivalentes:
a) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ sobre uma região simplesmente conexa V (região simplesmente conexa: qualquer curva fechada contém o seu interior na região.)
b)$\int_a^b \vec{F}.d\vec{l}$ independe da trajetória.
c)$\oint \vec{F}.d\vec{l} = 0$ sobre qualquer curva fechada.
d) $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$ para algum ϕ.

obs: (ϕ +constante) gera o mesmo campo que ϕ.

5)Propriedades de campos solenoidais. As seguintes afirmações são equivalentes:
a)$\vec{\nabla}.\vec{F} = 0$, em uma regão simplesmente conexa.
b)$\int_S \vec{F}.d\vec{a} = \int_{S'} \vec{F}.d\vec{a}$, se $\delta S = \delta S'$(as superfícies têm a mesma borda).
c)$\oint \vec{F}.d\vec{a} = 0$.
d)$\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{W}$ para algum $\vec{W}$.
obs: $\vec{W}' = \vec{W} + \vec{\nabla}\phi$ gera o mesmo campo que $\vec{W}$.

6) Teorema de Helmholtz:

Procuraremos construir a teoria do electromagnetismo nos baseando no teorema de Helmholtz: Se $\vec{\nabla}.\vec{F} = \rho$ e $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{J}$ (e portanto $\vec{\nabla}.\vec{J} = 0$) são conhecidos e decrescem no infinito mais rapidamente que $1/r^2$ e se $\vec{F}$ se anula no infinito então o campo vetorial $\vec{F}$ está univocamente determinado em termos de suas fontes como

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U + \vec{\nabla} \times \vec{W} \qquad (1.1.30)$$

onde

$$U = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\Delta\vec{r}|} d^3r' \qquad (1.1.31)$$

e

$$\vec{W} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\Delta\vec{r}|} d^3r' \qquad (1.1.32)$$

com $\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$.

1.2 Função delta de Dirac

É extremamente útil para o electromagnetismo ter noções mesmo que rudimentares de teoria das distribuições, pelo menos da distribuição conhecida como "função delta de Dirac". Para começar ela não é uma função ! No entanto na maioria das vezes pode ser tratada como se fosse uma função. Para motivar imagine uma distribuição volumétrica de cargas de densidade $\rho_{r_0}(\vec{r})$. Esta distribuição de cargas está concentrada num volume contido num raio r_0 em torno da origem e têm valor total para a carga q. Assim $\rho_{r_0}(\vec{r}) = 0$ se $r > r_0$ e $\int_{\mathcal{V}} \rho_{r_0} d^3r = q$ se a região $\mathcal{V}$ contém a bola de raio r_0 em torno da origem. A questão é saber qual a função densidade de cargas no limite em que $r_0 \longrightarrow 0$. Este limite não existe como função mas existe como função generalizada ou distribuição.

Vamos tomar inicialmente o caso unidimensional, em que a função delta tem como argumento somente uma variável escalar. A função delta de Dirac será definida pelas propriedades:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0 \text{ para } x \neq 0 \text{ e} && (1.2.1) \\ \int_{-a}^{b} \delta(x)dx &= 1 \text{ para quaisquer números a e b positivos.} && (1.2.2) \end{aligned}$$

Podemos imaginar a função delta como o limite quando um parâmetro ϵ vai a, digamos, zero de uma função de x que depende de ϵ também e que é muito grande em torno de $x = 0$ e se anula essencialmente fora deste entorno quando é tomado o limite. Quando $\epsilon \longrightarrow 0$ a região em torno de $x = 0$ para o qual a função difere substancialmente de zero fica cada vez mais estreita, ou seja valem as regras:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \delta_\epsilon(x) &= 0 \text{ para } x \neq 0, && (1.2.3) \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_\epsilon(x) &= 1. && (1.2.4) \end{aligned}$$

Desta maneira no limite quando ϵ se anula valem as eqs. (1.2.1) e (1.2.2). Por exemplo poderíamos tomar

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -\epsilon \\ \frac{1}{\epsilon} + \frac{x}{\epsilon^2} & \text{se} \quad -\epsilon < x < 0 \\ \frac{1}{\epsilon} - \frac{x}{\epsilon^2} & \text{se} \quad 0 < x < \epsilon \\ 0 & \text{se} \quad \epsilon < x \end{cases} \tag{1.2.5}$$

Uma conclusão que se tira é que se fazemos a integral do produto ponto a ponto da função delta de Dirac por uma função bem comportada $(\delta(x)f(x))$ esta integral no limite deve depender apenas do valor da função em $x = 0$ já que fora daí a delta vai se anular. Assim no limite quando ϵ se anula pode-se substituir a função pelo se valor em $x = 0$ no integrando. Conclui-se assim que

$$\int_{-a}^{b} f(x)\delta(x)dx = f(0). \tag{1.2.6}$$

Pode-se expressar este resultado simplesmente como $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$. Disto decorre em especial $x\delta(x) = 0$. Note que o limite $\epsilon \to 0$ acima não existe como função no entanto o limite da integral existe. No entanto a ideia básica da teoria das distribuições está em que uma distribuição (a função delta é uma distribuição) será sempre integrada após multiplica-lá por uma função teste, e o limite desta integral é que deve existir. Por este princípio uma distribuição herda várias propriedades de funções comuns. Por exemplo, uma translação no argumento de uma função afeta o resultado de integrais da seguinte maneira. Se tomamos a translação de uma função $g(x)$ para $g(x - x_0)$ uma integral desta nova função multiplicada por uma função $f(x)$ (função teste) será dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x - x_0)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x')f(x' + x_0)dx' \tag{1.2.7}$$

onde fizemos uso da mudança de variável de integração $x \longrightarrow x'$. De modo análogo podemos realizar uma translação no argumento da delta, definindo a função generalizada $\delta(x-x_0)$ por meio da propriedade

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)f(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x+x_0)dx \\ &= f(x_0). \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Podemos reescrever este resultado simplesmente como $\delta(x-x_0)f(x) = \delta(x-x_0)f(x_0)$. **Sempre que você tiver alguma dúvida sobre o comportamento da função delta de Dirac recorra à integral do produto desta por uma função bem comportada $g(x)$ (função teste) e interprete o resultado**.

Chega-se por este caminho a uma série de propriedades importantes da delta de Dirac:

1)$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$.

2)$\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x)$

Exercício: demonstre esta fórmula realizando a mudança de variáveis adequada na integral definidora da delta.

3)$\delta(f(x)) = \sum_{x_n} \frac{\delta(x-x_n)}{|f'(x_n)|}$, onde x_n são as raízes, para as quais $f(x_n) = 0$. A demonstração desta propriedade segue um argumento semelhante ao da anterior, se separamos as integrais nas contribuições do entorno de cada raiz.

4)$\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x)$. Aquí a função θ vale 1 para $x > 0$ e 0 para $x < 0$.

Exercício: Demonstre integrando por partes que $\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{d}{dx}\delta(x))f(x)dx = -f'(0)$.

Demonstre também que $x\frac{d}{dx}\delta(x) = -\delta(x)$.

Podemos agora generalizar para uma função delta com argumento vetorial:

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} \infty \ , \ \vec{r} = 0 \\ 0 \ , \ \vec{r} \neq \vec{0}. \end{cases} \tag{1.2.9}$$

e

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r\delta(\vec{r}) = 1 \qquad \text{se } \mathcal{V} \text{ inclui a origem.} \tag{1.2.10}$$

Uma carga pontual concentrada em $\vec{r} = \vec{r}_0$ será representada por uma densidade de carga $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$.

Exercício: Qual a densidade de carga associada a um triângulo equilátero de lado L no plano xy primeiro quadrante (x e y positivos) com um vértice na origem e uma aresta sobre o eixo $\hat{x}$, que porta carga q na origem e $-q$ nos outros vértices?

Um resultado importante que utilizaremos seguidamente é que:

$$\vec{\nabla}.(\frac{\vec{r}}{r^3}) \equiv \vec{\nabla}.(\frac{\hat{r}}{r^2}) = 4\pi\delta(\vec{r}) \tag{1.2.11}$$

Demonstração : Para $\vec{r} \neq \vec{0}$ o cálculo direto das derivadas mostra que a divergência se anula. Para saber seu "valor"na origem realizamos uma integral sobre uma região em torno da origem e utilizamos o teorema da divergência:

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}.\frac{\vec{r}}{r^3}d^3r = \oint_{\delta\mathcal{V}} \frac{\vec{r}}{r^3}.d\vec{S} = \oint \frac{\vec{r}}{r^3}.\hat{r}\ r^2\ d\Omega = \oint d\Omega = 4\pi. \tag{1.2.12}$$

Obtemos então, também, que

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}|} = -4\pi\delta(\vec{r}) \tag{1.2.13}$$

ou generalizando

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}'). \tag{1.2.14}$$

Utilizando a função delta de Dirac podemos agora demonstrar o teorema de Helmholtz:
Parte 1) Verificar que a expressão dada é solução do problema.

$$\vec{\nabla}.\vec{F} = \vec{\nabla}.(-\vec{\nabla}U) + \vec{\nabla}.\vec{\nabla} \times \vec{W}. \tag{1.2.15}$$

Já que o segundo termo se anula ficamos com

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}.\vec{F} = -\nabla^2 U &= \frac{-1}{4\pi} \int \nabla^2 \frac{\rho(\vec{r}')}{|\Delta\vec{r}|} d^3r' \\ &= \frac{-1}{4\pi} \int \rho(\vec{r}')(-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')d^3r' = \rho(\vec{r}). \end{aligned}$$

A demonstração de que $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{J}$ segue exatamente a mesma linha se usamos que $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{W}) = -\nabla^2\vec{W}$ já que $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{W})$ não contribui, pois

$$\vec{\nabla}.\vec{W} = \int_V \vec{J}(\vec{r}').\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\delta r}\right) d^3r' = -\int_V \vec{J}(\vec{r}').\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{\delta r}\right) d^3r'$$

$$= -\int_V \vec{\nabla}'\left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\delta r}\right) d^3r' + \int_V \left(\vec{\nabla}'.\vec{J}(\vec{r}')\right) \frac{1}{\delta r} d^3r'.$$

Mas conforme notamos no teorema de Helmholtz $\vec{\nabla}.\vec{J} = 0$. O termo restante pode ser transformado em integral de superfície utilizando o teorema da divergência, e, devido ao comportamento assintótico no infinito das soluções, ele também se anula.

Parte 2) Verificar unicidade da solução : Para isto suponha duas soluções distintas para as fontes dadas. Chamemos de $\vec{V}$ a diferença entre elas. Então $\vec{V}$ será um campo vetorial de rotacional e divergente nulos. Pelos teoremas que vimos duas seções atrás ele pode ser expresso como o gradiente de um campo escalar que satisfaz à equação de Laplace. Estudaremos mais adiante teoremas de unicidade para a equação de Laplace. No nosso caso devido ao comportamento no infinito as condições de unicidade levarão a que o campo $\vec{V}$ seja nulo. Ou seja não é possível ter duas soluções distintas e a solução apresentada é única.

1.3 Sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonais

No nosso curso estaremos interessados em utilizar principalmente os sistemas de coordenadas cartesiano, esférico e cilíndrico. No entanto a equação de Laplace é separável em um número maior de sistemas de coordenadas o que motiva fazer uma apresentação mais geral de sistemas de coordenadas generalizados ortogonais. Assim chamamos de x_i, $i = 1$, 2 ou 3, às coordenadas do sistema cartesiano. Um conjunto de coordenadas x'_i tal que todos os x_i sejam funções das novas coordenadas e vice-versa define um sistema de coordenadas generalizadas. A condição de ser uma sistema ortogonal é alcançada se as curvas obtidas fixando duas das novas coordenadas e variando a terceira forem ortogonais à curvas obtidas por outra escolha da variável que variamos. Um deslocamento infinitesimal de posição pode ser escrito em coordenadas cartesianas como

$$d\vec{r} = dx_i \hat{e}_i \tag{1.3.1}$$

Expressando este mesmo deslocamento em termos das novas coordenadas teremos

$$d\vec{r} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} dx'_j \hat{e}_i. \tag{1.3.2}$$

Para encontrar um vetor deslocamento infinitesimal na direção de crescimento da coordenada x'_j vamos fazer $dx'_j = \epsilon$ mantendo fixas as outras coordenadas $x'_{j'}$. Chamemos este deslocamento de $\Delta\vec{r}'_j$:

$$\Delta\vec{r}'_j = \epsilon \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \hat{e}_i, \tag{1.3.3}$$

e notemos que este vetor em geral depende da posição. A condição de que o sistema e coordenadas seja ortogonal se expressa como a condição de que os vetores $\Delta\vec{r}'_j$ e $\Delta\vec{r}'_l$ sejam ortogonais para quaisquer j e l distintos.

$$0 = \frac{\partial X_i}{\partial x'_j} \hat{e}_i . \frac{\partial X_k}{\partial x'_l} \hat{e}_k = \frac{\partial X_i}{\partial x'_j} \frac{\partial X_k}{\partial x'_l} \delta_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x'_j} \frac{\partial X_i}{\partial x'_l}. \tag{1.3.4}$$

O módulo do deslocamento infinitesimal $\Delta\vec{r}'_j$ se escreve como

$$|\Delta\vec{r}'_j| = \epsilon \sqrt{\frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}} \qquad \text{S. S. em j} \tag{1.3.5}$$

$$\equiv \epsilon h_j, \tag{1.3.6}$$

onde introduzimos as funções de escala h_j que são funções da posição. Estas funções são os instrumentos básicos para expressar os operadores diferenciais no sistema de referência curvilíneo. Observe que em função da ortogonalidade podemos escrever um deslocamento genérico como

$$\Delta\vec{r} = \sum_j h_j dx'_j \hat{x}'_j, \tag{1.3.7}$$

dessarte:

$$\Delta r^2 = \sum_j h_j^2 {dx'_j}^2. \tag{1.3.8}$$

Para obter a expressão do gradiente em termos de seus componentes nas novas direções, podemos utilizar que sob uma variação arbitrária infinitesimal teremos:

$$\begin{aligned}\nabla\phi(\vec{r}) &= \delta x_j \partial_j \phi \\ &= \delta x'_j \partial'_j \phi = \delta\vec{r}.\vec{\nabla}\phi. \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

Levando agora em consideração a equação (1.3.7)identificamos o componente do gradiente na direção dos novos eixos como

$$\vec{\nabla}'_i \phi = \frac{1}{h_i} \partial'_i \phi. \tag{1.3.10}$$

De modo semelhante a expressão da divergência pode ser obtida de

$$\vec{\nabla}.\vec{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\delta V} \vec{F}.d\vec{a}}{\Delta V}. \tag{1.3.11}$$

Se calculamos o fluxo para fora de um cubo formado por variações infinitesimais nas direções de cada coordenada x'_i se pode mostrar que

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{1}{h^3} \sum_j \partial'_j \left(\frac{h^3 V_j}{h_j} \right), \tag{1.3.12}$$

onde $h^3 = h_1 h_2 h_3$.

De modo semelhante partindo da equação

$$\oint_{\delta S} \vec{V} d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{V}.\, d\vec{S}, \tag{1.3.13}$$

se chega a

$$\left(\vec{\nabla} \times V \right)_i = \sum_{j,k} \frac{\epsilon_{ijk}}{h^3} h_i \partial'_j \left(V'_k h_k \right). \tag{1.3.14}$$

Exercício: mostre que em um sistema de coordenadas ortogonal qualquer a expressão do Laplaciano é dada por

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h^3} \sum_i \partial'_i \left(\frac{h^3 \partial'_i \phi}{h_i} \right). \tag{1.3.15}$$

Os sistemas de coordenadas mais utilizados por nós serão o esférico, para o qual temos

$$x'_1 = r, \quad x'_2 = \theta, \quad x'_3 = \phi \tag{1.3.16}$$
$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin\theta, \tag{1.3.17}$$

e o cilíndrico, com

$$x'_1 = \tilde{r}, \quad x'_2 = \phi, \quad x'_3 = z \tag{1.3.18}$$
$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1. \tag{1.3.19}$$

É um bom exercício partir das expressões gerais acima discutidas e obter as formas dos operadores diferenciais nestes dois sistemas de coordenadas.